PART2 漸化式と極限

要点整理と公式

要点 ① 隣接２項間漸化式と極限

漸化式で表された数列について，一般項を求めることによってその極限を求めることができる。

(ex) $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$ ……①$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$で定められる数列 $\{a_n\}$ の極限

①の a_{n+1}，a_n を α におき換えた方程式 $\alpha=\frac{1}{2}\alpha+3$ を解くと，$\alpha=6$

よって，$6=\frac{1}{2}\cdot 6+3$ ……②

① − ②より

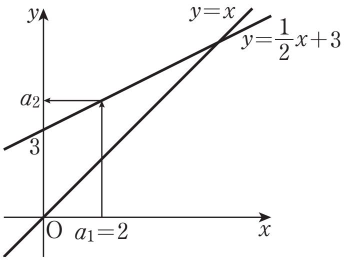
$$a_{n+1}-6=\frac{1}{2}(a_n-6) \qquad \text{また } a_1-6=2-6=-4$$

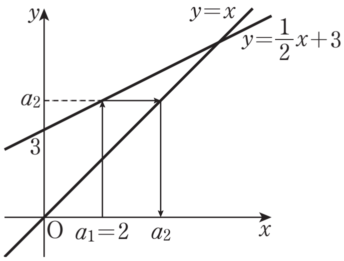
よって，数列 $\{a_n-6\}$ は，初項 -4，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

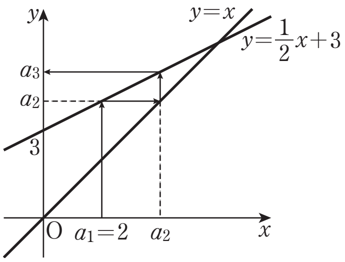
したがって $a_n-6=-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　ゆえに $a_n=6-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

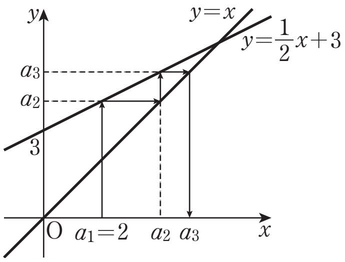
$-1<\frac{1}{2}<1$ より，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから $\lim_{n\to\infty}a_n=6$

①は，点 (a_n, a_{n+1}) が直線 $y=\frac{1}{2}x+3$ 上にあることを示している。$x=a_1$ を $y=\frac{1}{2}x+3$ に代入して得られる値が $y=a_2$ であり，この $y=a_2$ を $x=a_2$ として $y=\frac{1}{2}x+3$ に代入して得られる値が $y=a_3$ である。このように，求めた y 座標を，次の x 座標とみなすために，グラフ $y=x$ を用意する。





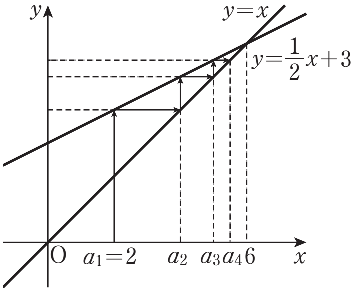




以下，同様にして a_4，a_5，a_6，……を x 軸上にとっていくと，その値は

$y=\frac{1}{2}x+3$ と $y=x$ のグラフの共有点の x 座標

に近づいていくことがわかる。



この共有点の x 座標 6 が，数列 $\{a_n\}$ の極限値である。

2 次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1) $a_1=6$, $a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+3$

(2) $a_1=1$, $a_{n+1}=4a_n+6$

Point Pickup

隣接 2 項間漸化式と極限

隣接 2 項間漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ で表される数列 $\{a_n\}$ の極限

→ 特性方程式 $\alpha=p\alpha+q$ の解 α (特性解)を用いて，与えられた漸化式を

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

と変形すると，数列 $\{a_n-\alpha\}$ は初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列である。

このことを用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求め，その極限を求める。

第 3 講　PART2 確認問題

1　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項および極限を求めよ。ただし，[ウ] は下の①～⑥のうちから選べ。

$a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

一般項　$a_n=$ [ア] $+$ [イ] $\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

極限　[ウ]

① 1　② 2　③ -1
④ -2　⑤ ∞　⑥ 振動

2　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項および極限を求めよ。ただし，[カ] は下の①～⑥のうちから選べ。

$a_1=6,\ a_{n+1}=3a_n-2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

一般項　$a_n=$ [エ] $+$ [オ] $\cdot 3^{n-1}$

極限　[カ]

① 1　② 2　③ -1
④ -2　⑤ ∞　⑥ 振動

PART2 漸化式と極限

2

次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1)　$a_1=6,\ a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+3$

(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+6$

[解答]

(1)　$a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+3$　……①の a_{n+1}，a_n を α におき換えた方程式 $\alpha=-\dfrac{1}{2}\alpha+3$ を解くと，$\alpha=2$

よって，$2=-\dfrac{1}{2}\cdot 2+3$　……②

① − ②より

$$a_{n+1}-2=-\frac{1}{2}(a_n-2)\qquad \text{また } a_1-2=6-2=4$$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は，初項 4，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって $a_n-2=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　ゆえに $a_n=2+4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$-1<-\dfrac{1}{2}<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$

(2)　$a_{n+1}=4a_n+6$　……①の a_{n+1}，a_n を α におき換えた方程式 $\alpha=4\alpha+6$ を解くと，$\alpha=-2$

よって，$-2=4\cdot(-2)+6$　……②

① − ②より

$$a_{n+1}+2=4(a_n+2)\qquad \text{また } a_1+2=1+2=3$$

よって，数列 $\{a_n+2\}$ は，初項 3，公比 4 の等比数列である。

したがって $a_n+2=3\cdot 4^{n-1}$　　ゆえに $a_n=-2+3\cdot 4^{n-1}$

$4>1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}4^{n-1}=\infty$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

第 3 講 PART2 確認問題 解答

1 [正解] ア：2，イ：3，ウ：②

[解説]

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1 \quad \cdots\cdots①$$

①の a_{n+1}，a_n を α に置き換えて，[A]

$$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$$

$$\alpha=2$$

よって，$2=\frac{1}{2}\cdot2+1 \quad \cdots\cdots②$

①−②より，

$$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$$

また，$a_1-2=5-2=3$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は，初項 3，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$a_n-2=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\boldsymbol{a_n=2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$-1<\frac{1}{2}<1$ より，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2$$ [B]

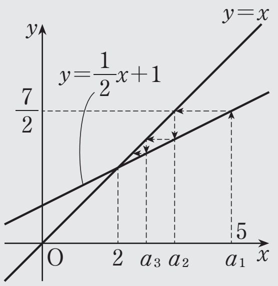
[A] $a_{n+1}=pa_n+q$ で表される数列の極限

① $\alpha=p\alpha+q$ を満たす α を求めて，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形する。

② 数列 $\{a_n-\alpha\}$ が初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列であることから，一般項 a_n を求める。

③ $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求める。

[B]



2

[正解] エ：1，オ：5，カ：⑤

[解説]

$$a_{n+1}=3a_n-2 \quad \cdots\cdots ①$$

①の a_{n+1}，a_n を α に置き換えて，[C]

$$\alpha=3\alpha-2$$

$$\alpha=1$$

よって，$1=3\cdot1-2 \quad \cdots\cdots ②$

①－②より，

$$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$$

また，$a_1-1=6-1=5$

よって，数列 $\{a_n-1\}$ は，初項 5，公比 3 の等比数列であるから，

$$a_n-1=5\cdot3^{n-1}$$ [D]

$$\boldsymbol{a_n=1+5\cdot3^{n-1}}$$

$3>1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}3^{n-1}=\infty$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\boldsymbol{\infty}$$

[C]　$a_{n+1}=pa_n+q$ で表される数列の極限

① $\alpha=p\alpha+q$ を満たす α を求めて，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形する。

② 数列 $\{a_n-\alpha\}$ が初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列であることから，一般項 a_n を求める。

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求める。

[D]　初項 a，公比 r の等比数列の第 n 項は，ar^{n-1}